$$\text{Lös}(A, \underline{b})$$

$$:= \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot \underline{x} = \underline{b} \}$$

$$= \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{matrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{matrix} \right\}$$

Gesucht: Darstellung der Form

$$\boxed{\text{Lös}(A, \underline{b}) = \underline{v} + \mathbb{R}\underline{w}_1 + \dots + \mathbb{R}\underline{w}_k}$$

<u>Def. 1.4.6</u>

Eine <u>elementare Zeilenumformung</u> (EZU) eines LGSs / einer Matrix ist eine der folgenden Umformungen:

(Vert.) Vertauschung zweier Zeile

(Add.) Addition des λ-fachen einer Zeile zu einer anderen Zeile, für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Skalarm.) Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$.

1.4.6 Satz

Die Lösungsmenge eines LGS ändert sich unter elementaren Zeilenumformungen NICHT.

Das heißt:

Ist (A, b) erweiterte Koeff.-matrix eines LGSs und geht $(\tilde{A}, \tilde{b})$ aus ihr durch endlich viele elementare Zeilenumformungen hervor, so ist

$$\text{Lös}(A, b) = \text{Lös}(\tilde{A}, \tilde{b})$$

1.4.7 Satz

endlich viele

Jede Matrix lässt sich durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform bringen.

(Man braucht sogar nur (Vert.) und (Add.).)

Beweis

A $m \times n$-Matrix

SCHRITT 1:

Falls $A = 0$: fertig.

Falls $A \neq 0$:

Betrachte die (von links nach rechts) erste Spalte $\neq \underline{0}$, sagen wir Spalte j.

Wähle in dieser Spalte j eine Zeile i mit Eintrag $a := a_{ij} \neq 0$.

Vertausche (falls $i \neq 1$) Zeilen i & 1. (Vert.)

Nenne neue Matrix A'.

SCHRITT 2

Addiere in A' zu jeder Zeile $k > 1$ das $\left(-\frac{a'_{kj}}{a}\right)$-fache.

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a & \\ \vdots & & \vdots & a'_{2j} & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & a'_{kj} & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & a_{mj} & \end{pmatrix}$$

Die sich ergebende Matrix hat die Form:

$$A'' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \\ \vdots & & \vdots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

Wiederhole nun das Verfahren für die Untermatrix von A'', die aus Zeilen $2 \dots m$ besteht.

$\square$

1.4.8 Eliminationsverfahren

EZU Wende auf erweiterte Koeffizientenmatrix

$$(A, \underline{b})$$

mit dem in Satz 1.4.7 beschriebenen Verfahren element. Zeilenumformungen an, um eine Matrix

$$(\tilde{A}, \underline{\tilde{b}})$$

zu erhalten, in der $\tilde{A}$ in Zeilenstufenform ist.

Auflösen Finde für

$$\text{Lös}(\tilde{A}, \underline{\tilde{b}}) = \text{Lös}(A, \underline{b})$$

eine Parameterdarstellung

$$\underline{v} + \mathbb{R}\underline{w}_1 + \dots + \mathbb{R}\underline{w}_k$$

wie zuvor beschrieben.

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + x_3 &= 2\\
-2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1\\
-2x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 4
\end{aligned}
$$

Ezu

$$
(A, \underline{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 2\\ -2 & -1 & 2 & 1 & 1\\ -2 & -1 & 5 & 2 & 4 \end{array}\right)
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 2\\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 6 & 2 & 6 \end{array}\right) \quad (-2)
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

Spalten ohne Pivots (x_2, x_4)

Auflösen

Wähle $\boxed{\begin{aligned} x_2 &= \lambda_1 \\ x_4 &= \lambda_2 \end{aligned}}$ $\in \mathbb{R}$, $\in \mathbb{R}$

(Zeile 2): $3x_3 + \lambda_2 = 3$, also

$$\boxed{x_3 = 1 - \tfrac{1}{3}\lambda_2}$$

(Zeile 1): $2x_1 + \lambda_1 + x_3 = 2$, also

$2x_1 + \lambda_1 + \overbrace{\left(1 - \tfrac{1}{3}\lambda_2\right)}^{x_3} = 2$, also

$2x_1 = 1 - \lambda_1 + \tfrac{1}{3}\lambda_2$, also

$$\boxed{x_1 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\lambda_1 + \tfrac{1}{6}\lambda_2}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tfrac{1}{2} + \lambda_1 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) + \lambda_2 \cdot \left(\tfrac{1}{6}\right) \\ \lambda_1 \\ 1 + \lambda_2 \cdot \left(-\tfrac{1}{3}\right) \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \tfrac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -\tfrac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \tfrac{1}{6} \\ 0 \\ -\tfrac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Lös}(A, \underline{b}) = \begin{pmatrix} \tfrac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -\tfrac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} \tfrac{1}{6} \\ 0 \\ -\tfrac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}}$$